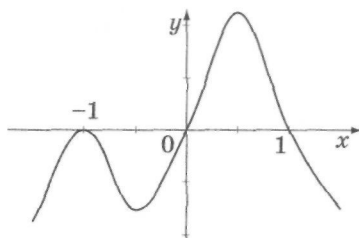


Розділ 2

Похідна та її застосування

Частина 1. Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

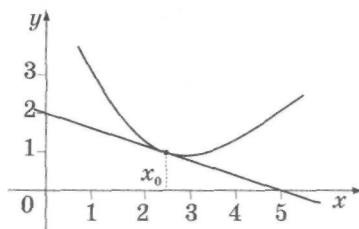
1. На малюнку зображено графік функції $y = f(x)$. Укажіть правильну нерівність.



А	Б	В
$f(1) < f'(-1) < f(0)$	$f'(1) < f'(0) < f'(-1)$	$f'(-1) < f'(0) < f'(1)$

Г	Д
$f(-1) < f'(1) < f'(0)$	$f'(0) < f'(-1) < f'(1)$

2. На малюнку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0 . Знайдіть значення $f'(x_0)$.



А	Б	В	Г	Д
2	-2,5	2,5	-0,4	0,4



3. Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$, паралельна бісектрисі першого і третього координатних кутів. Обчисліть $f'(2)$.

А	Б	В	Г	Д
2	1	0	-1	для розв'язання задачі не вистачає даних

4. Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$, не перетинає вісь абсцис. Обчисліть $f'(-3)$.

А	Б	В	Г	Д
-3	-1	0	1	для розв'язання задачі не вистачає даних

5. Укажіть рівняння прямої, яка МОЖЕ бути дотичною до графіка функції $y = \ln x$ у деякій точці.

А	Б	В	Г	Д
$x = 1$	$y = x - 1$	$y = x$	$y = x + 1$	$y = 1$

6. До якої з наведених функцій пряма $y = 0$ є дотичною у точці з абсцисою $x_0 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{x}$	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = x^2$	до всіх функцій із пунктів А-Г

7. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 1$. Скільки разів під час руху точка зупиниться (її швидкість дорівнюватиме нулю)?

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

8. Укажіть за умовою попередньої задачі, в який момент часу t_0 прискорення матеріальної точки дорівнюватиме нулю.

А	Б	В	Г	Д
$t_0 = 0$	$t_0 = 0,5$	$t_0 = 1$	$t_0 = 2$	$t_0 = 2,5$



9. Який із наведених законів руху задає рівномірний рух по прямій?

А	Б	В
$s(t) = 2$	$s(t) = 2t - 10$	$s(t) = 2t^2 - 10t + 7$

Г	Д
$s(t) = 2\sqrt{t+10}$	$s(t) = 10 + 2t - t^3$

10. Який із наведених законів руху задає рівносповільнений рух по прямій?

А	Б	В	Г	Д
$s(t) = 2$	$s(t) = 2t - 10$	$s(t) = 2t^2 - 10t$	$s(t) = -2t^2 + 10t$	$s(t) = 2t - 10t^3$

11. Для якої із наведених функцій виконується рівність $f'(1) = 1$?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 1$	$f(x) = x^2$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \sin x$	$f(x) = -\frac{1}{x}$

12. Для скількох із функцій, наведених у варіантах відповідей попередньої задачі, НЕ ІСНУЄ $f'(0)$?

А	Б	В	Г	Д
для всіх функцій $f'(0)$ існує	для однієї	для двох	для трьох	для більше ніж трьох

13. Якщо $f(x) = \ln(\cos x)$, то $f'(x) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	1

14. Скільки коренів має рівняння $\left(\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)' = 1$?

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох



15. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq 0$, якщо $f(x) = x - 5^2$.

А	Б	В	Г	Д
$x \in (-\infty; 0]$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; 10]$	$x \in [10; +\infty)$	нерівність не має розв'язків

16. Що можна сказати про правильність наступних тверджень:

- 1) якщо $f(x) = \cos 2$, то $f'(x) = 0$;
- 2) якщо $f(x) = |x - 1|$, то не існує $f'(1)$;
- 3) якщо $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-10)$, то $f'(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10$?

А	Б	В	Г	Д
усі твер- дження правильні	усі тверджен- ня, крім першого, правильні	усі тверджен- ня, крім другого, правильні	усі тверджен- ня, крім третього, правильні	неправиль- них тверджень не менше ніж два

17. Укажіть рівняння, з якого визначаються всі критичні точки функції $y = x - \sin x$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x = 1$	$\sin x = 1$	$\sin x = x$	$\sin x = -1$	$\cos x = -1$

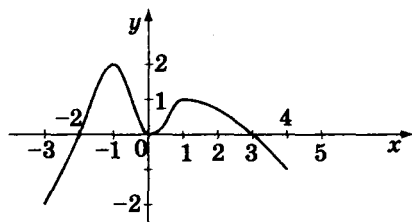
18. Скільки точок екстремуму має функція $y = 3 + x^4$?

А	Б	В	Г	Д
жодної	одну	дві	три	більше трьох

19. Скільки точок екстремуму НЕ МОЖЕ мати функція $y = ax^4 + bx^2 + cx + d$?

А	Б	В	Г	Д
чотири	три	дві	одну	жодної

20. На малюнку зображено графік функції $y = f'(x)$ на відрізку $[-3; 4]$. Скільки точок екстремуму на цьому відрізку має функція $y = f(x)$?

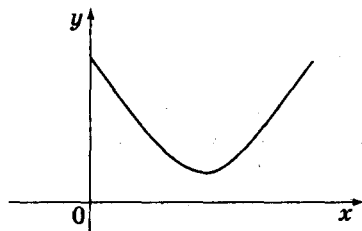


А	Б	В	Г	Д
жодної	одну	дві	три	більше трьох

21. За умовою попередньої задачі знайдіть суму довжин проміжків, які містяться у відрізку $[-3; 4]$ і на яких функція $y = f(x)$ зростає.

А	Б	В	Г	Д
таких проміжків не існує	2	3	4	5

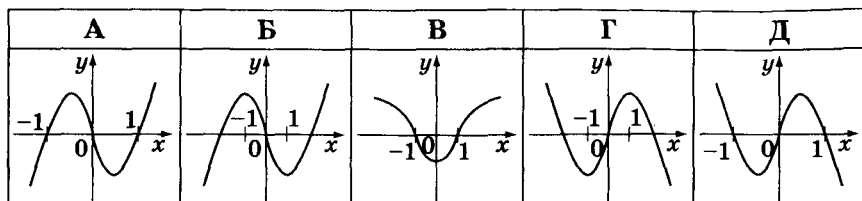
22. На малюнку зображено графік функції $y = f(x)$. Серед наведених нижче графіків укажіть графік функції $y = f'(x)$.



А	Б	В	Г	Д

23. Серед наведених графіків функцій укажіть графік функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і для якої знаки похідної $y = f'(x)$ наведено на схемі.





24. Укажіть нерівність, з якої визначаються проміжки зростання функції $y = \cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x < 0$	$\sin x < 0$	$\arccos x > 0$	$\sin x > 0$	$\cos x > 0$

25. Для якої із наведених функцій нерівність $f'(x) > 0$ має місце для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = x^2$	$f(x) = \sin^2 x$	$f(x) = 3^x$	$f(x) = x^3$	$f(x) = x $

26. Укажіть похідну функції, яка є строго спадною на $(-\infty; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = -x$	$f'(x) = 2^{-x}$	$f'(x) = - x $	$f'(x) = \cos(-2)$	$f'(x) = -x^4$

27. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, причому час вимірюється у секундах, а відстань – у метрах. Яку **НАЙБІЛЬШУ** швидкість матиме ця матеріальна точка під час перших 3 с руху?

А	Б	В	Г	Д
1,5 м/с	3 м/с	7,5 м/с	9 м/с	12 м/с

28. Знайдіть таке значення параметра a , при якому **НАЙМЕНШЕ** значення функції $f(x) = x^2 - 4x + a$ на відрізку $[0; 3]$ дорівнює 2.

А	Б	В	Г	Д
$a = 6$	$a = 4$	$a = 2$	$a = 0$	інша відповідь

29. Скільки точок перегину має функція $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$?

А	Б	В	Г	Д
жодної	одну	дві	три	відповідь залежить від значень параметрів a, b, c

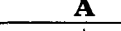
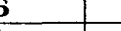
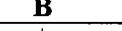
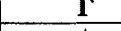
34. При якому НАЙМЕНШОМУ значенні параметра a пряма $x = -4$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = \log_2(x + a^2)$?

А	Б	В	Г	Д
$a = 4$	$a = -4$	$a = 2$	$a = -2$	інша відповідь

35. Для функції $y = f(x)$ відомо, що $f'(x) > 0$ для $x > 0$ і $f''(x) < 0$ для $x > 0$. Який із графіків МОЖЕ бути графіком функції $y = f(x)$?

А	Б	В	Г	Д

36. Для функції $y = f(x)$ мають місце наступні властивості: 1) $f'(x) < 0$ для $x < 0$; 2) $f''(0) = 0$. Який із графіків МОЖЕ бути графіком функції $y = f(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

37. Перший елемент геометричної прогресії дорівнює a . Знайдіть значення знаменника цієї прогресії, при якому різниця між четвертим і другим елементами цієї прогресії буде **НАЙБІЛЬШОЮ**.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	такого значення не існує	таке значення існує, але залежить від параметра a

38. Дано прямокутник, периметр якого дорівнює 20 см. Знайдіть відношення довжин сторін прямокутника, при якому він матиме **НАЙБІЛЬШУ** площу.

А	Б	В	Г	Д
1 : 1	1 : 2	2 : 3	1 : 3	3 : 4



39. Знайдіть число x , яке перевищує $\frac{1}{12}$ свого куба на найбільшу величину.

А	Б	В	Г	Д
$x = 12$	$x = 9$	$x = 4$	$x = 2$	інша відповідь

40. Вартість діаманта визначається за формулою $p = k \cdot m^2$, де p – вартість у гривнях, m – маса у грамах, k – сталий коефіцієнт пропорційності. Деякий діамант розпиляли на дві частини таким чином, щоб сума вартостей отриманих частин була НАЙМЕНШОЮ. Знайдіть відношення мас отриманих частин.

А	Б	В	Г	Д
2 : 3	1 : 2	1 : 1	1 : 3	1 : 10

Частина 2. Запишіть відповідь ДЕСЯТКОВИМ ДРОБОМ.

41. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $y = x^3 - x^2 - 6x + 2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Відповідь: _____

42. Знайдіть значення параметра a , при якому пряма $y = ax - 4$ буде паралельною дотичній, проведений до графіка функції $y = -5x^2 + 2x + 7$ у точці $M(1; 4)$.

Відповідь: _____

43. Задано функцію $y = 2x^2 - x - 1$. До графіка цієї функції у точках з абсцисами x_1 та x_2 проведено дотичні, які перпендикулярні між собою. Знайдіть x_2 , якщо $x_1 = 1$. У разі необхідності відповідь округліть до сотих.

Відповідь: _____

44. Закон руху матеріальної точки задано функцією $s(t) = 100 - t + 24t^2 - 0,3t^5$. У який момент часу ця матеріальна точка матиме НАЙБІЛЬШУ швидкість?

Відповідь: _____

45. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = |t - 2,5| + |t - 6|$, причому час вимірюється у секундах, а відстань – у метрах. Скільки секунд матеріальна точка стояла на місці?

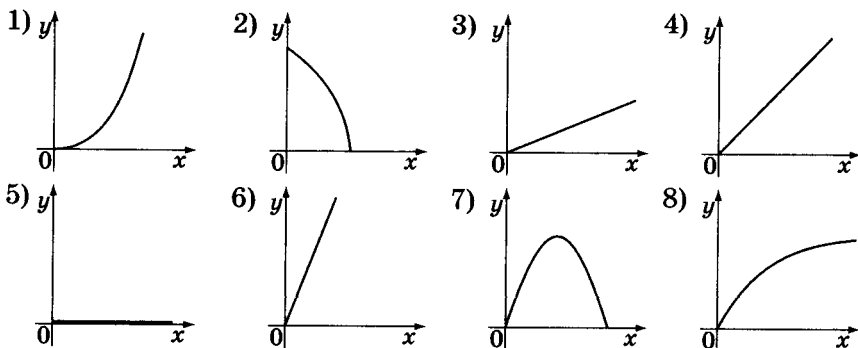
Відповідь: _____ с.



46. Під дією постійної сили $F = 80$ Н матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2,5t^2 - 1,5t + 0,5$ (час вимірюється у секундах, відстань – у метрах, сила – у ньютонах). Знайдіть масу матеріальної точки у кілограмах.

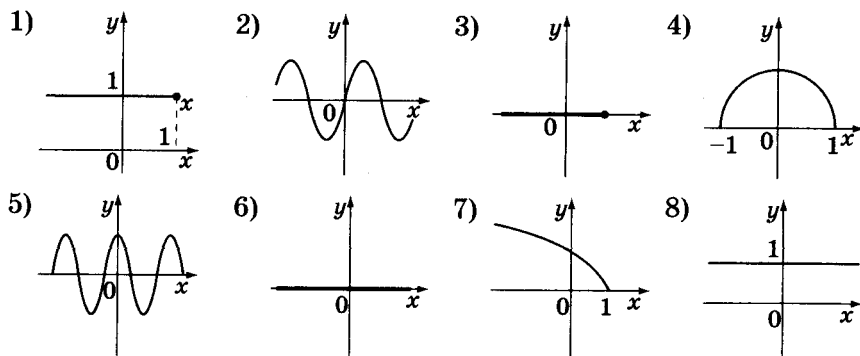
Відповідь: _____ кг.

47. Нехай $S(x)$ – площа круга радіуса x . Який із графіків МОЖЕ бути графіком функції $y = S'(x)$? У відповідь запишіть НОМЕР потрібного графіка.



Відповідь: _____

48. Задано функцію $f(x) = \sin^2 \sqrt{1-x} + \cos^2 \sqrt{1-x}$. Укажіть НОМЕР графіка функції $y = f'(x)$.



Відповідь: _____

49. Задано функцію $y = \sqrt[3]{ax^2 + bx + 8}$. Знайдіть значення параметра b , при якому $y'(0) = \frac{1}{3}$.

Відповідь: _____

50. Знайдіть $f'(0,5)$, якщо $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)$, $x \in (-1; 1)$.

Відповідь: _____

51. Знайдіть точки екстремуму функції $y = 4^x \cdot (x + 1)^4$. Якщо така точка одна, то запишіть у відповідь її цілу частину; якщо таких точок кілька, то запишіть у відповідь **НАЙБІЛЬШУ** з їх цілих частин.

Відповідь: _____

52. Знайдіть **УСІ ЦІЛІ** значення параметра a , при яких функція $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (a+2)x - 11$ строго зростає на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

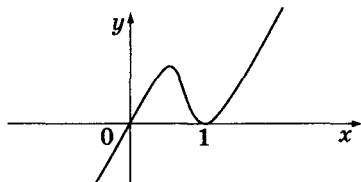
Якщо таке значення параметра одне, то запишіть його у відповідь; якщо таких значень кілька, то запишіть у відповідь **НАЙБІЛЬШЕ** з них.

Відповідь: _____

53. Знайдіть **НАЙБІЛЬШЕ** значення параметра a , при якому рівняння $x^3 - 75x = a$ матиме два корені.

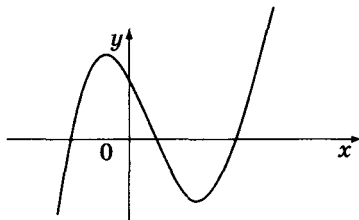
Відповідь: _____

54. На малюнку зображено графік функції $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Знайдіть значення параметрів a, b і c . У відповідь запишіть **СУМУ** значень цих параметрів.



Відповідь: _____

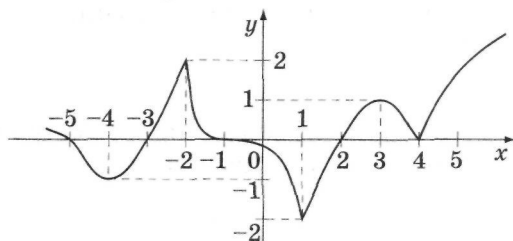
55. На малюнку зображено графік функції $y = ax^3 - 2x^2 + bx + c$. Визначте знаки параметрів a, b і c . У відповідь запишіть **НОМЕР** правильного варіанта із наведених нижче.



- 1) $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c < 0; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c < 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < 0; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c > 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c > 0. \end{cases}$

Відповідь: _____

56. Використовуючи графік функції $y = f(x)$, $x \in [-5; 5]$, знайдіть корені рівняння $f'(x) = 0$ на проміжку $[-5; 5]$. У відповідь запишіть СУМУ цих коренів.



Відповідь: _____

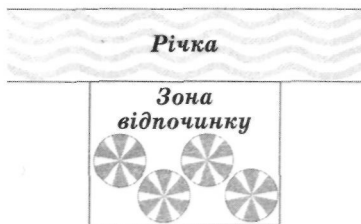
57. Дано точки $A(0; 0)$ і $B(9; 3)$, які належать графіку функції $y = \sqrt{x}$. Знайдіть абсцису $x \in [0; 9]$ точки C , яка також належить графіку цієї самої функції, але так, що трикутник ACB має найбільшу площу.

Відповідь: _____

58. Відомо, що (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть таку різницю цієї прогресії d , щоб при $a_1 = 3$ добуток $a_2 \cdot a_4^2$ був НАЙБІЛЬШИМ. У разі необхідності відповідь округліть до сотих.

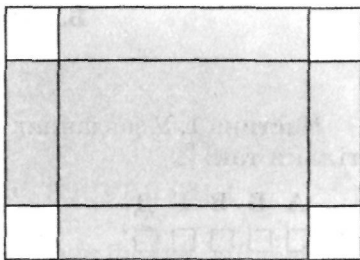
Відповідь: _____

59. Зону відпочинку біля річки планують огородити так, як зображено на малюнку (від річки огорожа не ставиться). Для цього завезено 4000 м огорожі. Яку найбільшу площу (у гектарах) може мати огорожена таким чином зона відпочинку?



Відповідь: _____ га.

60. Для виготовлення акваріума Петрик узяв прямокутний шматок скла довжиною 80 см і шириною 50 см та розрізав його так, як це зображено на малюнку. Після вилучення чотирьох однакових кутових квадратів акваріум було склеєно. Який **НАЙБІЛЬШИЙ** об'єм (у літрах) міг мати акваріум Петрика?



Відповідь: _____ л.

Частина 3. Розв'язання завдань цієї частини обґрунтуйте.

Для цього запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. У разі необхідності проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

61. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 10x - \cos(10x) = 10y - \cos(10y), \\ \lg^2 x + \frac{1}{\log_y \sqrt{10}} + 1 = 0. \end{cases}$$

62. Задано функцію $y = \frac{1}{x}$, $x \in (1; +\infty)$. Знайдіть:

а) рівняння дотичної, проведеної до графіка цієї функції у точці з абсцисою x_0 ;

б) площу трапеції, утвореної дотичною з пункту а) і прямими $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

в) точку на графіку функції $y = \frac{1}{x}$, через яку треба провести дотичну, щоб площа трапеції з пункту б) була **НАЙБІЛЬШОЮ**.

63. Задано послідовність функцій $f_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (-1; 1)$. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

64. Із круга радіуса $r = 10$ см вирізано сектор із центральним кутом α . Знайдіть:

а) значення $\alpha_{\max}$, при якому конус, згорнутий із цього сектора, матиме найбільший об'єм;

б) найбільший об'єм $V_{\max}$, який відповідає центральному куту $\alpha_{\max}$.

БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ

Розділ 2

Частина 1. У завданнях 1–40 правильну відповідь позначайте тільки так: ☒

А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	7	☐	☐	☐	☐	13	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	8	☐	☐	☐	☐	14	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	9	☐	☐	☐	☐	15	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	10	☐	☐	☐	☐	16	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	11	☐	☐	☐	☐	17	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	12	☐	☐	☐	☐	18	☐	☐	☐	☐
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
19	☐	☐	☐	☐	25	☐	☐	☐	☐	31	☐	☐	☐	☐
20	☐	☐	☐	☐	26	☐	☐	☐	☐	32	☐	☐	☐	☐
21	☐	☐	☐	☐	27	☐	☐	☐	☐	33	☐	☐	☐	☐
22	☐	☐	☐	☐	28	☐	☐	☐	☐	34	☐	☐	☐	☐
23	☐	☐	☐	☐	29	☐	☐	☐	☐	35	☐	☐	☐	☐
24	☐	☐	☐	☐	30	☐	☐	☐	☐	36	☐	☐	☐	☐
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д					
37	☐	☐	☐	☐	39	☐	☐	☐	☐					
38	☐	☐	☐	☐	40	☐	☐	☐	☐					

Частина 2. У завданнях 41–60 відповідь записуйте тільки десятковим дробом, з огляду на положення коми, по одній цифрі в кожній клітинці.

41				,				47				,				53				,			
42				,				48				,				54				,			
43				,				49				,				55				,			
44				,				50				,				56				,			
45				,				51				,				57				,			
46				,				52				,				58				,			
59				,																			
60				,																			